29/11/17

Θεώρημα Πολυωνυμικής Προσέγγισης Weierstrass.

Δοθέντων $f \in C[a,b]$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει πολυώνυμο π τέτοιο ώστε: $|f(x) - \pi(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [a,b]$.

Πολυωνυμική παρεμβολή τύπου Lagrange.

Θεώρημα: Έστω $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ διαφορετικά μεταξύ τους και $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Τότε $\exists$ μοναδικό πολ/μο p, το πολύ n βαθμού ($p \in \mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}_n$ ο χώρος των πολ/μων το πολύ n βαθμού) τέτοιο ώστε $p(x_i) = y_i$, $i = 0,1,2,\dots,n$.

Απόδ.

Έστω $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

Αρκεί να προσδιοριστούν τα a_i, $i = 0,1,2,\dots,n$ από τις σχέσεις $p(x_i) = y_i$, $i = 0,1,2,\dots,n$

Αυτές αποτελούν γραμμικό σύστημα $n+1$ εξισ. με $n+1$ αγν.:

$$a_0 + x_0 a_1 + x_0^2 a_2 + \dots + x_0^n a_n = y_0$$
$$a_0 + x_1 a_1 + x_1^2 a_2 + \dots + x_1^n a_n = y_1$$
$$\vdots$$
$$a_0 + x_n a_1 + x_n^2 a_2 + \dots + x_n^n a_n = y_n$$

Είναι ένα γρ. σύστημα Vandermonde.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}, \quad \det(A) \neq 0$$

αν τα x_i διαφορετικά μεταξύ των

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{i} (x_i - x_j)$$

αυτό σημαίνει ότι το γραμμικό σύστημα έχει μοναδική λύση, άρα μοναδικό θα είναι και το πολ/μο $P(x)$ που περνάει από τα σημεία (x_i, y_i), $i=0,1,2,3,\dots,n$

Θεώρημα: Έστω $f \in C^{n+1}[a,b]$ και $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b]$

Τότε για κάθε $x \in [a,b]$, υπάρχει $\xi \in (a,b)$, τέτοιο ώστε:

(1) $f(x) - P(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$, $P \in \mathbb{P}_n$, το πολ. παρεμβολής στα $(x_i, f(x_i))$, $i=0,1,2,\dots,n$

στα $(x_i, f(x_i))$, $i=0,1,2,\dots,n$. Για το μέγιστο απόλυτο σφάλμα:

(2) $\|f - P\|_\infty \le \dfrac{1}{(n+1)!} \max_{a \le x \le b} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \cdot \|f^{(n+1)}\|_\infty$

όπου $\|g\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |g(x)|$

Απόδ.

Αν $x = x_i$, τότε η (1) ισχύει ως $0=0$.

Έστω $x \in [a,b]$, $x \neq x_i$, $i=0,1,2,\dots,n$

Θεωρούμε την συνάρτηση φ ως:

$$\varphi(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x) - P(x)}{\Phi(x)} \Phi(t),$$

όπου $\Phi(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$

η $\varphi \in C^{n+1}[a,b]$. Παρατηρούμε ότι:

$$\varphi(x_i) = f(x_i) - P(x_i) - \frac{f(x) - P(x)}{\Phi(x)} \Phi(x_i) = 0,$$

$i = 0, 1, n$.

$$\phi(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}\,\phi(x) = 0,$$

Η ϕ έχει τουλάχιστον $n+2$ ρίζες στο $[a,b]$ τις $x_0, x_1, \dots, x_n, x$.

η ϕ' από το θεώρημα Rolle θα έχει τουλ. $n+1$ ρίζες στο (a,b),

η ϕ'' έχει τουλάχιστον n ρίζες στο (a,b)

κ.ο.κ.

Τελικά η $\phi^{(n+1)}$ θα έχει τουλ. μια ρίζα $\xi \in (a,b)$

$$\phi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - p^{(n+1)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}\,\phi^{(n+1)}(t),$$

$$= f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}\,(n+1)!$$

$$0 = \phi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x)-P(x)}{\phi(x)}\,(n+1)!$$

$$\Leftrightarrow f(x)-p(x) = f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{\phi(x)}{(n+1)!} \quad (1)$$

$$\|f-p\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|f(x)-p(x)| = \max \frac{1}{(n+1)!}\left|\phi(x) f^{(n+1)}(\xi)\right|$$

$$\le \frac{1}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}|\phi(x)| \max_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|$$

Αν η f είναι πολυώνυμο το πολύ n βαθμού τότε το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι η ίδια η f. Από την σχέση (1) έχουμε $f(x)-p(x)=0$, $\forall x\in[a,b] \Leftrightarrow p=f$.

(2) Η f είναι πολ/μο n βαθμού το πολ., και περνάει από τα σημεία $(x_i, f(x_i))$, $i=0,1,n$ λόγω μοναδικότητας του πολ/μου παρεμβολής, αυτή θα είναι το πολ. παρεμβολής.

Εφαρμογή: Να βρεθεί το πολ/μο παρεμβολής της $f \in C^2[a,b]$, στα σημεία $x_0, x_1 \in [a,b]$ και να γίνει η εκτίμηση του σφάλματος.

Λύση

Πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι πρώτου βαθμού δηλαδή η ευθεία που περνάει από τα $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$p_1(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + f(x_0)$$

$$\|f - p\|_\infty \leq \frac{1}{2!} \max_{a \leq x \leq b} |(x - x_0)(x - x_1)| \cdot \|f^{(2)}(\xi)\|_\infty$$

Έστω ότι $x_0 = a$ και $x_1 = b$

$$\max_{a \leq x \leq b} |(x-a)(x-b)| = \max_{a \leq x \leq b} (x-a)(b-x)$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$\|f - p_1\| \leq \frac{1}{8}(b-a)^2 \|f^{(2)}\|_\infty$$